

Capítulo 9

AVALIAÇÃO DA INCERTEZA EM MEDIÇÕES INDIRETAS

Este capítulo aborda procedimentos para estimar a incerteza associada à medição em casos onde o valor do mensurando não pode ser determinado diretamente a partir da indicação vinda de um único instrumento de medição, mas deve ser calculada por uma equação que relaciona mais de uma grandezas de entrada medidas independentemente. Estimativas iniciais das incertezas padrão associadas a cada uma destas grandezas de entrada devem ser conhecidas e são o ponto de partida para os procedimentos aqui apresentados.

9.1 *Considerações preliminares*

9.1.1 Medições diretas e indiretas

Na medição direta o valor associado ao mensurando resulta naturalmente da aplicação do sistema de medição sobre este. Há interesse focado apenas em uma grandeza. A medição de um diâmetro com um paquímetro, da temperatura de uma sala por um termômetro são exemplos de medição direta.

A medição indireta envolve a determinação do valor associado ao mensurando a partir da combinação de duas ou mais grandezas por meio de expressões matemáticas. São exemplos de medição indireta: a) a determinação da área de um terreno a partir da multiplicação dos valores medidos para sua largura e comprimento, b) a determinação da massa específica de um material calculada a partir da razão entre sua massa e seu volume e c) a medição da corrente que passa por um condutor a partir da divisão da queda de tensão medida sobre um resistor de precisão em série com o condutor pelo valor da sua resistência elétrica.

Embora menos prática que a medição direta, a medição indireta é utilizada com muita frequência, principalmente em casos onde: a) por impossibilidade física não é viável fazer medições diretas e b) do ponto de vista econômico, ou, no que diz respeito ao nível de incerteza possível de ser obtida, é mais vantajoso efetuar medições indiretas.

9.1.2 Dependência estatística

Como visto no capítulo 8, duas variáveis aleatórias são ditas estatisticamente independentes se suas variações se comportam de forma totalmente desvinculadas, isto é, não há nenhuma relação entre o crescimento momentâneo e aleatório de uma e o crescimento (ou decrescimento) da outra. Do ponto de vista estatístico estas variáveis são ditas independentes ou não correlacionadas, e seu coeficiente de correlação é zero.

Duas variáveis aleatórias são ditas estatisticamente dependentes se suas variações se dão de forma vinculadas, isto é, há uma relação nitidamente definida entre o crescimento de uma e o crescimento da outra de forma proporcional à primeira. Do ponto de vista estatístico estas variáveis são ditas correlacionadas, e seu coeficiente de correlação é unitário (+1). Há ainda o caso em que o crescimento da primeira está nitidamente atrelado ao decrescimento proporcional da segunda. Neste caso estas variáveis possuem correlação inversa, e seu coeficiente de correlação é também unitário porém negativo (-1).

Duas variáveis aleatórias podem apresentar dependência estatística parcial, isto é, nem são totalmente dependentes nem totalmente independentes. Nestes casos, o coeficiente de correlação entre estas variáveis pode assumir qualquer valor não inteiro entre -1 e +1.

A indicação de um módulo ou sistema de medição é uma variável aleatória. As variações observadas em uma série de indicações obtidas de medições sucessivas, realizadas nas mesmas condições e do mesmo mensurando, são manifestação desta parcela aleatória. Os fatores que provocam esta aleatoriedade são diversos, podendo ter origem interna no próprio sistema de medição, ou resultarem de efeitos externos provocados por grandezas de influência como, por exemplo, variações ambientais, variações da tensão da rede elétrica, etc.

Nos casos onde dois ou mais módulos da cadeia de medição estão expostos às mesmas grandezas de influência, e seus comportamentos são particularmente sensíveis a uma ou mais destas grandezas de influência, é muito provável que as indicações destes módulos apresentem dependência estatística. Flutuações aleatórias das grandezas de influência podem provocar alterações correspondentes em cada módulo. Estas alterações serão correlacionadas. Quando as principais grandezas de influência são relativamente bem controladas, isto é, mantidas constantes, as variações em cada módulos possuem uma série de causas secundárias, o que resulta, com grande probabilidade, em independência estatística. É sempre possível caracterizar de forma segura o tipo de dependência estatística calculando, para cada caso, o coeficiente de correlação linear.

Embora grande parte das variáveis aleatórias envolvidas na medição seja parcialmente dependentes, para tornar o cálculo de incertezas mais facilmente executável, é prática comum aproximar seu comportamento e classificá-las como totalmente dependentes ou independentes. Na prática, apenas em situações muito raras a dependência estatística parcial é considerada.

De uma forma simplificada, em medições indiretas é comum tratar como estatisticamente dependentes as medições de diferentes parâmetros efetuadas pelo mesmo instrumento. Por exemplo, se um mesmo paquímetro é usado para medir os comprimentos dos três lados de um paralelepípedo cujo volume deseja-se calcular, estas três medições são tratadas como estatisticamente dependentes (ou correlacionadas). Esta prática justifica-se quando considera-se que, nos três casos, o SM pode estar trazendo um erro muito similar para as três medições (por exemplo, uma parcela sistemática desconhecida, provocada pelo desgaste), o que caracterizaria uma situação de “sincronismo” do erro, ou, em outras palavras, dependência estatística.

Por outro lado, medições efetuadas por diferentes SM são tratadas como estatisticamente independentes (ou não correlacionadas). No exemplo anterior, se o comprimento de cada lado do paralelepípedo fosse medido por um SM diferente, os erros de medição de cada SM seriam independentes, gerando a situação de independência estatística.

9.2 Grandezas de entrada estatisticamente dependentes

No caso em que há dependência estatística entre as variáveis de entrada, a variação aleatória associada a cada grandeza de entrada poderá estar agindo de forma sincronizada sobre as respectivas indicações. Para estimar a incerteza da combinação de duas ou mais grandezas de entrada estatisticamente dependentes, deve ser levado em conta que estas podem assumir, ao mesmo tempo, valores extremos dentro de suas respectivas faixas de incerteza. O valor estimado geralmente representa os limites da variação máxima possível.

Embora exista uma expressão geral para a estimativa da incerteza associada à combinação de grandezas de entrada estatisticamente dependentes, há casos particulares, freqüentemente presentes na prática, onde as equações são drasticamente simplificadas. A

soma e subtração e a multiplicação e divisão são grupos de operações onde são possíveis simplificações consideráveis e serão inicialmente tratados.

9.2.1 Soma e subtração

A combinação das incertezas de grandezas de entrada estatisticamente dependentes que são apenas somadas ou subtraídas entre si é muito simples, e pode ser intuída por simples observação. Seja o caso onde deseja-se somar o valor de duas massas conhecidas, determinadas a partir de uma mesma balança e nas mesmas condições de medição dadas por:

$$m_1 = (200 \pm 4) \text{ g}$$

$$m_2 = (100 \pm 3) \text{ g}$$

O valor mínimo possível desta soma pode ser calculado por:

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)_{\min} &= (200 - 4) + (100 - 3) \\ &= (200 + 100) - (4 + 3) \\ &= 300 - 7 = 293 \text{ g}\end{aligned}$$

Analogamente, o valor máximo possível é obtido por:

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)_{\max} &= (200 + 4) + (100 + 3) \\ &= (200 + 100) + (4 + 3) \\ &= 300 + 7 = 307 \text{ g}\end{aligned}$$

O que leva ao resultado:

$$m_1 + m_2 = 300 \pm 7 \text{ g}$$

Por observação, nota-se que a incerteza de 7 g resulta da soma das incertezas 3 g e 4 g. De fato, esta regra é válida tanto para soma quanto para subtração, como pode ser facilmente verificado.

Esta mesma regra continua válida para qualquer número de termos envolvidos, desde que apenas somas e/ou subtrações estejam presentes no cálculo. Porém, recomenda-se combinar as incertezas padrão de cada variável de entrada e, somente após obter a incerteza padrão combinada, estimar a incerteza expandida. Em termos genéricos, pode-se escrever:

$$u(x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \dots) = u(x_1) + u(x_2) + u(x_3) + \dots \quad (9.1)$$

ou seja:

na soma ou subtração de qualquer número de grandezas de entrada estatisticamente dependentes, a incerteza padrão combinada do resultado pode ser estimada pela soma algébrica das incertezas padrão individuais de cada grandeza envolvida

É também possível mostrar que:

$$u(k_1.x_1 \pm k_2.x_2 \pm k_3.x_3 \pm \dots) = k_1.u(x_1) + k_2.u(x_2) + k_3.u(x_3) + \dots \quad (9.1a)$$

onde $k_1, k_2, k_3, \dots$, são constantes multiplicativas

9.2.2 Multiplicação e divisão

Também neste caso, através de um exemplo simples, é possível intuir a expressão para a estimativa da incerteza combinada: Seja V o volume de um paralelepípedo calculado pelo produto dos seus lados: a , b e c , cada qual conhecido com incertezas $u(a)$, $u(b)$ e $u(c)$ respectivamente e estatisticamente independentes entre si. Logo:

$$V \pm u(v) = (a \pm u(a)) \cdot (b \pm u(b)) \cdot (c \pm u(c))$$

Expandindo a expressão acima:

$$V \pm u(v) = a \cdot b \cdot c \pm b \cdot c \cdot u(a) \pm a \cdot c \cdot u(b) \pm a \cdot b \cdot u(c) \pm a \cdot u(b) \cdot u(c) \pm b \cdot u(a) \cdot u(c) \pm c \cdot u(a) \cdot u(b) \pm u(a) \cdot u(b) \cdot u(c)$$

Subtraindo $V = a \cdot b \cdot c$ de ambos os lados e desprezando os termos de ordens mais altas, obtém-se:

$$u(v) = b \cdot c \cdot u(a) + a \cdot c \cdot u(b) + a \cdot b \cdot u(c)$$

Dividindo ambos os termos desta equação por $V = a \cdot b \cdot c$, obtém-se finalmente:

$$\frac{u(v)}{V} = \frac{u(a)}{a} + \frac{u(b)}{b} + \frac{u(c)}{c}$$

$u(v)/V$, $u(a)/a$, $u(b)/b$ e $u(c)/c$ são as incertezas relativas de cada grandeza. Assim, verifica-se que na multiplicação a incerteza relativa do produto é estimada pela soma das incertezas relativas de cada fator. Pode-se verificar que esta conclusão também vale para a divisão e também para qualquer número ou combinações entre multiplicações e divisões.

Assim, pode ser escrito de forma genérica que:

$$\begin{aligned} \frac{u(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots)}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots} &= \frac{u(x_1)}{x_1} + \frac{u(x_2)}{x_2} + \frac{u(x_3)}{x_3} + \dots \\ &e \\ \frac{u(x_1 / x_2 / x_3 / \dots)}{x_1 / x_2 / x_3 / \dots} &= \frac{u(x_1)}{x_1} + \frac{u(x_2)}{x_2} + \frac{u(x_3)}{x_3} + \dots \end{aligned} \quad (9.2)$$

ou seja:

na multiplicação e/ou divisão de várias grandezas de entrada estatisticamente dependentes, a incerteza padrão relativa combinada é obtida pela soma das incertezas padrão relativas de cada grandeza de entrada envolvida

a) Exemplo 1:

Determine a incerteza padrão associada à medição da área de um círculo, cujo diâmetro foi medido, sendo encontrado $d = 30,02$ mm com incerteza padrão $u(d) = 0,05$ mm.

Solução:

A expressão para o cálculo da área é $A = \frac{1}{4} \pi d^2$, que pode ser reescrita como:

$$A = \frac{1}{4} \pi d^2$$

que se trata apenas de multiplicações. Neste caso, a equação (9.2) pode ser empregada:

$$u(A)/A = u(\frac{1}{4})/(\frac{1}{4}) + u(\pi)/\pi + u(d)/d + u(d)/d$$

Porém, $\frac{1}{4}$ é um número matematicamente exato, sua incerteza é nula o que também anula o termo $u(\frac{1}{4})/(\frac{1}{4})$. π pode ser hoje calculado com milhares de casas decimais, mas dificilmente é representado por mais de 5 ou 6 algarismos significativos. A incerteza no valor de π é muito mais consequência do erro de truncamento quando se considera apenas algumas casas decimais. Se um número suficiente de dígitos for considerado, o termo $u(\pi)/\pi$ pode ser desprezado frente ao $u(d)/d$. Assim, tem-se:

$$u(A)/A = 2 u(d)/d, \text{ ou}$$

ou

$$u(A)/A = 2 \cdot 0,05/30,02$$

$$u(A)/A = 0,00333$$

$$u(A) = 0,00333 \cdot (\frac{1}{4} (\pi \cdot 30,02)^2)$$

$$u(A) = 2,36 \text{ mm}^2$$

b) Exemplo 2:

Determinar a incerteza da grandeza (G) calculada por: $G = (a+b)/c$, sabendo-se que a, b e c são estatisticamente dependentes.

Embora trate-se de uma combinação entre soma e divisão, o cálculo da incerteza pode ser efetuado por etapas. Para tal, seja $d = a + b$, logo:

$$u(d) = u(a+b) = u(a) + u(b)$$

e

$$u(G)/G = u(d)/d + u(c)/c$$

obs: o procedimento ilustrado neste exemplo em particular, onde são combinadas soma/subtração com multiplicação/divisão por meio de variáveis intermediárias, só pode ser efetuado se estas variáveis não aparecem mais de uma vez dentro da expressão. Não seria possível, por exemplo, aplicar este procedimento para $H = (a+b)/(a-b)$. Estes casos são tratados no item seguinte.

9.2.3 Caso geral

A estimativa da incerteza combinada para o caso geral, onde as grandezas de entrada se relacionam através de uma expressão matemática qualquer, pode ser efetuada através da aplicação de uma expressão genérica. Sua demonstração matemática é baseada na expansão da expressão em termos de série de Taylor e não será tratada neste texto. Seja, por exemplo, uma grandeza G calculada em função de diversas grandezas de entrada relacionadas por:

$$G = f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$$

Após a expansão em série de Taylor, eliminação de termos de ordens mais altas e redução de termos semelhantes chega-se a:

$$u(G) = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| u(x_1) + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| u(x_2) + \left| \frac{\partial f}{\partial x_3} \right| u(x_3) + \left| \frac{\partial f}{\partial x_4} \right| u(x_4) + \dots \quad (9.3)$$

onde:

$u(G)$ representa a incerteza padrão da grandeza G

$u(x_1), u(x_2), u(x_3), u(x_4), \dots$ representam as incertezas padrão associadas às grandezas de entrada $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ respectivamente

$\left| \right|$ representa o módulo (valor absoluto) da expressão do seu interior

É muito fácil verificar que as equações (9.1) e (9.2) são casos particulares da equação (9.3).

9.3 **Grandezas de entrada estatisticamente independentes**

No caso em que as grandezas de entrada são estatisticamente independentes entre si, isto é, não guardam nenhuma forma de sincronismo, são remotas as chances que as variações aleatórias, associadas a cada grandeza de entrada, levem a uma combinação em que todos os valores extremos sejam atingidos ao mesmo tempo. Para este caso, é possível demonstrar que a forma mais apropriada para combinar estes efeitos é através da soma das variâncias. A estimativa para a incerteza padrão combinada, nessas condições, resulta em um número menor do que seria obtido se as grandezas de entrada fossem tratadas como estatisticamente dependentes.

Embora, também neste caso, exista uma expressão geral para a estimativa da incerteza padrão associada à combinação de grandezas de entrada estatisticamente independentes, há casos particulares, freqüentemente presentes na prática, onde as equações são drasticamente simplificadas.

9.3.1 Soma e subtração

A soma de duas variáveis aleatórias estatisticamente independentes é um problema já bastante estudado pela estatística. O valor médio da soma pode ser estimado pela soma dos valores médios de cada variável. A variância da soma pode ser estimada a partir da soma das variâncias de cada variável. Para a subtração, o comportamento é similar.

A incerteza padrão associada às grandezas de entrada estatisticamente independentes tem um comportamento estatístico semelhante ao do desvio padrão quando estas são combinadas. Assim, uma expressão geral para a estimativa da incerteza combinada associada à somas e/ou subtrações de duas ou mais grandezas de entrada estatisticamente independentes é dada por:

$$u^2(x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \dots) = u^2(x_1) + u^2(x_2) + u^2(x_3) + \dots \quad (9.4)$$

ou seja:

na soma e subtração de várias grandezas de entrada estatisticamente independentes, o quadrado da incerteza padrão combinada é obtida pela soma dos quadrados das incertezas padrão de cada grandeza de entrada envolvida

Exemplo:

Considerando que as massas m_1 e m_2 dadas por:

$$m_1 = 200 \quad \text{com } u(m_1) = 4 \text{ g}$$

$$m_2 = 100 \quad \text{com } u(m_2) = 3 \text{ g}$$

foram medidas por balanças e em condições completamente diferentes e independentes, determine a incerteza associada à sua soma.

Neste caso, é razoável tratar estas grandezas de entrada como estatisticamente independentes. Assim, a incerteza combinada pode ser estimada por:

$$u(m_1 + m_2) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

A massa resultante será:

$$m_1 + m_2 = 300 \text{ g} \quad \text{com } u(m_1 + m_2) = 5 \text{ g}$$

Note que o valor estimado para a incerteza padrão da soma neste caso é inferior a 7 g, o que seria encontrado caso estas variáveis fossem tratadas como estatisticamente dependentes.

9.3.2 Multiplicação e divisão

Neste caso, uma expressão indicada para estimar a incerteza resultante da combinação de apenas multiplicações e/ou divisões de qualquer número de variáveis de entrada estatisticamente independentes pode ser deduzida.

Seja G a grandeza de interesse calculada por multiplicações e/ou divisões de várias grandezas de entrada, simbolicamente representadas por:

$$G = (x_1)^{\pm 1} \cdot (x_2)^{\pm 1} \cdot (x_3)^{\pm 1} \cdot \dots$$

A incerteza relativa combinada pode ser estimada por:

$$\left(\frac{u(G)}{G} \right)^2 = \left(\frac{u(x_1)}{x_1} \right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2} \right)^2 + \left(\frac{u(x_3)}{x_3} \right)^2 + \dots \quad (9.5)$$

o que permite formar o seguinte enunciado:

na multiplicação e divisão de várias grandezas de entrada estatisticamente independentes, o quadrado da incerteza padrão relativa combinada é obtida pela soma dos quadrados das incertezas padrão relativas de cada grandeza de entrada envolvida

Exemplo:

Determine a incerteza padrão associada à corrente elétrica que passa por um resistor R previamente conhecido de 500,0 W com incerteza padrão $u(R) = 0,5 \text{ W}$, sobre o qual mediu-se a queda de tensão de $V = 150,0 \text{ V}$ com $u(V) = 1,5 \text{ V}$.

A expressão para o cálculo da corrente é dada por $I = V/R$. Este caso envolve apenas divisão de duas grandezas de entrada que, como foram medidas independentemente por instrumentos diferentes, podem ser tratadas com estatisticamente independentes. Assim, sendo o valor esperado para a corrente dado por:

$$I = 150/500 = 0,30 \text{ A}$$

Sua incerteza pode ser estimada por:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u(I)}{I} \right)^2 &= \left(\frac{u(V)}{V} \right)^2 + \left(\frac{u(R)}{R} \right)^2, \text{ ou} \\ \left(\frac{u(I)}{0,3} \right)^2 &= \left(\frac{1,5}{150} \right)^2 + \left(\frac{0,5}{500} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{u(I)}{0,3}\right)^2 = (0,01)^2 + (0,001)^2 = 0,0001 + 0,000001$$

$$u(I) = 0,003 \text{ A}$$

Assim:

$$I = 0,300 \text{ A e sua incerteza padrão } u(I) = 0,003 \text{ A}$$

Note que, neste caso, a contribuição na incerteza associada à tensão elétrica tem uma influência 100 vezes maior do que a incerteza da resistência sobre a incerteza padrão da corrente. É óbvio que, se for desejável reduzir a incerteza do valor da corrente, a incerteza padrão associada à medição da tensão precisa ser reduzida. De nada adiantaria reduzir a incerteza da resistência elétrica apenas.

9.3.3 Caso geral

Há uma expressão genérica que permite estimar a incerteza padrão combinada para o caso geral onde apenas grandezas de entrada estatisticamente independentes se relacionam através de uma expressão matemática. Seja, por exemplo, uma grandeza G calculada em função de diversas grandezas de entrada relacionadas por:

$$G = f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$$

A incerteza combinada da grandeza G pode ser estimada por:

$$u^2(G) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot u(x_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot u(x_2)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot u(x_3)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_4} \cdot u(x_4)\right)^2 + \dots \quad (9.6)$$

onde:

$u(G)$ representa a incerteza padrão da grandeza G

$u(x_1), u(x_2), u(x_3), u(x_4), \dots$ representam as incertezas padrão associadas às grandezas de entrada $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ respectivamente

Também neste caso é fácil verificar que as equações (9.4) e (9.5) são casos particulares da equação (9.6).

Exemplo:

Na determinação da massa específica (ρ) de um material usou-se um processo indireto, medindo-se com uma balança a massa (m) de um cilindro cujo diâmetro (D) e altura (h) foram determinados por um micrômetro e um paquímetro respectivamente. Após a estimativa das incertezas padrão associadas, foram encontrados os seguintes resultados para cada grandeza medida:

$m = 1580 \text{ g}$	$u(m) = 10 \text{ g}$
$D = 25,423 \text{ mm}$	$u(D) = 0,003 \text{ mm}$
$h = 77,35 \text{ mm}$	$u(h) = 0,05 \text{ mm}$

A massa específica é calculada por:

$$r = \frac{m}{\text{Vol}} = \frac{4m}{p D^2 h}$$

Como tratam-se de grandezas estatisticamente independentes, a equação (9.6) deve ser aplicada para determinar a incerteza padrão combinada $u(\rho)$.

A equação (9.6) envolve as derivadas parciais de ρ em relação a cada grandeza independente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial m} &= \frac{4}{p D^2 h} \\ \frac{\partial r}{\partial h} &= \frac{-4m}{p D^2 h^2} \\ \frac{\partial r}{\partial D} &= \frac{-8m}{p D^3 h}\end{aligned}$$

que leva a:

$$u(r) = \sqrt{\left(\frac{4}{p D^2 h} \cdot u(m)\right)^2 + \left(\frac{-4m}{p D^2 h^2} \cdot u(h)\right)^2 + \left(\frac{-8m}{p D^3 h} \cdot u(D)\right)^2} \quad (9.7)$$

Esta equação permite estimar a incerteza associada à massa específica obtida nas condições especificadas. Entretanto, esta equação pode ser rearranjada de forma a tornar-

$$\frac{u(r)}{r} = \sqrt{\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{u(h)}{h}\right)^2 + \left(2\frac{u(D)}{D}\right)^2} \quad (9.8)$$

se mais simples. Para tal, sejam ambos os membros divididos por ρ . Assim:

que é o mesmo resultado que se obtém pela aplicação da equação (9.5).

Substituindo os valores de m , D , h e suas incertezas padrão na equação (9.8) chega-se a:

$$\begin{aligned}\frac{u(r)}{r} &= \pm \frac{1}{10000} \sqrt{(63,3)^2 + (2,36)^2 + (6,46)^2} \\ &\quad \text{ou} \\ \frac{u(r)}{r} &= \pm \frac{1}{10000} \sqrt{4006,1 + 5,6 + 41,7}\end{aligned}$$

Portanto a massa específica do material poderá ser dada como.

$$r = \frac{4 \cdot m}{p \cdot D^2 \cdot h}$$

$$r = \frac{4,1580}{3,1416 (25,423)^2 \cdot 77,35}$$

$$r = 0,040239 \text{ g/mm}^3$$

daí:

$$u(r) = 0,00637 \cdot 0,040239$$

$$u(r) = 0,0002563 \text{ g/mm}^3$$

ou seja:

$$r = 0,04024 \text{ g/mm}^3 \quad e \quad u(r) = 0,00025 \text{ g/mm}^3$$

O exemplo mostra claramente que a incerteza padrão combinada está sendo fortemente afetada pela incerteza da massa, em função desta ter incerteza padrão relativa superior às demais grandezas. Uma melhora no resultado da medição só será alcançada buscando-se reduzir a incerteza de medição da massa até níveis em que haja uma equiparação com a incerteza de medição relativa associada às outras grandezas.

9.4 Dependência estatística parcial

Há casos mais complexos onde as interações entre grandezas de entrada que compõem uma medição direta não podem ser realisticamente modeladas como sendo perfeitamente dependentes e nem independentes do ponto de vista estatístico. São os casos onde há dependência estatística parcial. A forma de quantificar a dependência estatística linear parcial é através do coeficiente de correlação linear entre cada par de grandezas de entrada envolvidas. Haverá dependência parcial se o coeficiente de correlação for um número não inteiro.

9.4.1 Combinação de grandezas estatisticamente dependentes e independentes

Será inicialmente abordado o caso onde apenas combinações de grandezas de entrada estatisticamente dependentes e independentes são envolvidas. Sejam, por exemplo, as grandezas a, b e c onde sabe-se, *a priori*, que:

- ♦ a e b são estatisticamente dependentes ($r(a,b) = 1$)
- ♦ a e c e b e c são estatisticamente independentes entre si ($r(a,c) = 0$ e $r(b,c) = 0$)

A incerteza padrão combinada da grandeza G dada por: $G = f(a, b, c)$ pode ser estimada por:

$$u^2(G) = \left(\frac{\partial f}{\partial a} \cdot u(a) + \frac{\partial f}{\partial b} \cdot u(b) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c} \cdot u(c) \right)^2 \quad (9.9)$$

9.4.2 Caso geral

A expressão usada para estimar a incerteza padrão combinada de uma grandeza G dada por:

$$G = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

considerando que pode haver dependência estatística parcial entre cada par das grandezas de entrada $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, é dada por:

$$u^2(G) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r(x_i, x_j) \quad (9.10)$$

onde $r(x_i, x_j)$ é o coeficiente de correlação entre as grandezas de entrada x_i e x_j .

Exemplo:

Seja o volume V de um paralelepípedo determinado a partir do produto dos comprimentos de cada um dos seus lados. Os lados “a” e “b” foram medidos por um mesmo sistema de medição e nas mesmas condições. O lado “c” foi medido por outro instrumento independente e em momentos distintos. Determine a incerteza padrão do volume.

Solução:

Em função de um mesmo instrumento ter sido usado para medir os lados “a” e “b”, é provável que estas grandezas de entrada estejam fortemente correlacionadas. Este fato deveria ser verificado experimentalmente pelo cálculo do coeficiente de correlação entre “a” e “b”, “b” e “c” e entre “a” e “c”. Para três grandezas de entrada, a equação (9.10) resume-se a:

$$u^2(V) = \left(\frac{\partial V}{\partial a} u(a) \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial b} u(b) \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial c} u(c) \right)^2 + 2 \frac{\partial V}{\partial a} \frac{\partial V}{\partial b} u(a) u(b) r(a, b) + \\ + 2 \frac{\partial V}{\partial b} \frac{\partial V}{\partial c} u(b) u(c) r(b, c) + 2 \frac{\partial V}{\partial a} \frac{\partial V}{\partial c} u(a) u(c) r(a, c)$$

Assume-se aqui que $r(a, b) = 1$. Como a medição do lado “c” é independente das demais, assume-se $r(b, c) = 0$ e $r(a, c) = 0$. Assim, sendo $V = a \cdot b \cdot c$, estes dados aplicados na equação acima ficam:

$$u^2(V) = (b \cdot c \cdot u(a))^2 + (a \cdot c \cdot u(b))^2 + (a \cdot b \cdot u(c))^2 + 2 \cdot bc \cdot ac \cdot u(a) \cdot u(b) \cdot 1$$

dividindo ambos os membros por V^2 , a equação acima fica:

$$\left(\frac{u(V)}{V} \right)^2 = \left(\frac{u(a)}{a} \right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b} \right)^2 + \left(\frac{u(c)}{c} \right)^2 + 2 \left(\frac{u(a)}{a} \frac{u(b)}{b} \right)$$

Note que há um quadrado perfeito no segundo termo que pode ser reagrupado como:

$$\left(\frac{u(V)}{V} \right)^2 = \left(\frac{u(a)}{a} + \frac{u(b)}{b} \right)^2 + \left(\frac{u(c)}{c} \right)^2$$

Que é a solução do problema. A expressão acima também poderia ser diretamente obtida da aplicação da equação (9.9).

9.5 Incerteza padrão e incerteza expandida

Recomenda-se que a incerteza associada à medição indireta seja estimada através das estimativas das incertezas padrão de cada grandeza de entrada. Somente após obter a incerteza padrão combinada da medição indireta, determina-se a correspondente incerteza expandida.

Também neste caso, a incerteza expandida é estimada pela multiplicação da incerteza padrão combinada pelo respectivo fator de abrangência. O fator de abrangência é determinado em função do número de graus de liberdade efetivo, obtido a partir da equação de Welch-Satterthwaite (8.13), conforme abordado no capítulo 8. O fator de abrangência é obtido da tabela de coeficientes também apresentada neste capítulo.

O número de graus de liberdade de cada grandeza de entrada corresponde ao número de graus de liberdade efetivo encontrado por ocasião da sua estimativa. Se esta informação não é disponível, deve ser aproximadamente estimado em função das condições de medição. Após o cálculo de ν_{ef} , determina-se k_{95} e, finalmente:

$$U_{95} = k_{95} \cdot u$$

9.6 Problema resolvido

Determine a incerteza na determinação da velocidade média de um projétil a partir do tempo “t” que este leva para percorrer a distância “d” entre dois sensores. A distância foi medida, sendo encontrado $d = (182,4 \pm 0,4)$ m, determinado com 20 graus de liberdade efetivos e $t = (52,6 \pm 0,3)$ ms, determinado com 12 graus de liberdade, já incluindo a influência dos sensores e suas imperfeições.

Solução:

A velocidade média é calculada por $V = d/t$. Por serem medidas por instrumentos diferentes e, provavelmente, em momentos diferentes, as grandezas “d” e “t” certamente são estatisticamente independentes. A equação (9.5) pode ser usada para estimar a incerteza de V.

Para aplicar esta equação, deve-se utilizar as incertezas padrão de “d” e “t”, que podem ser obtidas a partir da divisão da incerteza expandida pelo respectivo fator de abrangência. Os valores de k_{95} para 20 e 12 graus de liberdade são 2,13 e 2,23 respectivamente. Assim:

$$\begin{aligned} u(d) &= 0,4/2,13 = 0,188 \text{ m} \\ u(t) &= 0,3/2,23 = 0,135 \text{ ms} \end{aligned}$$

A incerteza padrão combinada pode ser determinada por:

$$\left(\frac{u(V)}{V} \right)^2 = \left(\frac{u(d)}{d} \right)^2 + \left(\frac{u(t)}{t} \right)^2$$

Sendo o valor nominal de dado por: $V = 182,4 \text{ m}/52,6 \text{ ms} = 3467,7 \text{ m/s}$, a estimativa da incerteza padrão $u(V)$ será

$$\left(\frac{u(V)}{3467,7} \right)^2 = \left(\frac{0,188}{182,4} \right)^2 + \left(\frac{0,135}{52,6} \right)^2$$

$$u(V) = 9,59 \text{ m/s}$$

Como as unidades de cada grandeza são diferentes, é conveniente usar a equação de Welch-Satterthwaite na forma relativa. Assim, o número de graus de liberdade efetivo será:

$$\frac{\left(\frac{u(V)}{V}\right)^4}{n_{ef}} = \frac{\left(\frac{u(d)}{d}\right)^4}{n_d} + \frac{\left(\frac{u(t)}{t}\right)^4}{n_t}$$

Logo, $\nu = 15,9$ e $k_{95} = 2,17$

Assim, a incerteza expandida será:

$$U_{95}(V) = 2,17 \cdot 9,59 = 20,8 \text{ m/s com } \nu = 16$$

E a velocidade poderá finalmente ser expressa por:

$$V = (3468 \pm 21) \text{ m/s}$$